Glava 3

Teorija igara

Jedna od osnovnih primena LP je u teoriji igara. Teorija igara se odnosi na igre između dva igrača A i B, gde se dobici igrača A (gubici igrača B) prikazuju matricom.

3.1 Donja i gornja cena matrične igre. Čista cena igre.

Ograničićemo se na igre u kojima učestvuje dva igrača. Tok igre se odvija nizom hodova igrača. Hod je izbor jedne od strategija u saglasnosti sa pravilima igre.

Strategija igrača je skup pravila koja određuju izbor hoda igrača. Ako svaki igrač ima na raspolaganju konačan broj strategija, igra se naziva konačnom.

Cilj teorije igara je da se analizira konfliktna situacija i odredi razumno ponašanje igrača u toku igre, tj. da se odrede optimalne strategije igrača. Optimalna strategija je takva strategija koja pri višestrukom ponavljanju igre obezbeđuje igraču maksimalno mogući dobitak, odnosno, minimalno mogući gubitak. Pri izboru optimalne strategije polazi se od činjenice da je protivnik razuman i da će ućiniti sve da nas spreći u ostvarenju cilja. Osnovni princip teorije igara je sledeći: igrač bira svoje ponašanje tako da mu dobitak u igri bude maksimalan uz, za njega, najnepovoljnije delovanje protivnika.

Neka igrač A ima na raspolaganju m strategija $A_1, A_2, \ldots, A_m$ i igrač B - n strategija $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Za svaki par strategija (A_i, B_j) označavamo dobitak igrača A sa a_{ij} ($a_{ij} > 0$ kada igrač A dobija i $a_{ij} < 0$ kada igrač A gubi). Ove dobitke igrača A možemo zapisati u obliku matrice gde vrste odgovaraju strategijama igrača A a kolone strategijama igrača B. Ovakva tabela naziva se *matricom plaćanja* ili *matricom igre.*

	B_1	B_2	$\ldots$	B_n	Minimum vrsta α_i
A_1	a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1n}	α_1
A_2	a_{21}	a_{22}	$\ldots$	a_{2n}	α_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\vdots$
A_m	a_{m1}	a_{m2}	$\ldots$	a_{mn}	α_m
Maks. kol. β_j	β_1	β_2	$\ldots$	β_n	

Postavimo zadatak da za igrača A odredimo najbolju između njegovih strategija $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Birajuci A_i igrač A mora da računa na to da će igrač B izabrati onda strategiju B_j za koju će dobitak igrača biti najmanji, tj. izabraće strategiju B_j tako da a_{ij} bude najmanje između dobitaka $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ij}, \ldots, a_{in}$. Ako minimalni dobitak u i-toj vrsti označimo sa α_i, onda je

$$\alpha_i = \min_j a_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

Za svaku od strategija A_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ uočavamo minimalne dobitke α_i i upisujemo ih u dodatnu kolonu na istoku matrice plaćanja. Izbegavajući svaki rizik, igrač A će svakako dati prednost onoj strategiji za koju je broj α_i najveći. Označimo tu vrednost sa α:

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij}$$

Veličina α se zove *donja cena igre* ili maksiminimalni dobitak. Strategija koja igraču A obezbeđuje ovaj dobitak naziva se maksiminimalna strategija. Ako se igrač A pridržava maksiminimalne strategije, tada mu je, bez obzira na ponašanje igrača B zagarantovan dobitak ne manji od α.

Analogno rasuđujemo o optimalnoj strategiji igrača B. On je zainteresovan da dobitak igrača A umanji. Zato on razmatrajući sve svoje strategije uočava za svaku od njih koliki je maksimalni dobitak igrača A. U dodatnoj vrsti, na jugu matrice plaćanja, upisujemo maksimalne dobitke po kolonama

$$\beta_j = \max_i a_{ij}, j = 1, 2, \ldots n$$

i nalazimo njihovu najmanju vrednost

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij}$$

Veličina β se naziva $gornjacenaigre$ ili minimaksni dobitak. Strategija igrača B koja igraču A ne dopušta veći dobitak od β naziva se minimaksna strategija. Držeći se te strategije igrač B može biti siguran da neće igubiti više od β.

Princip prema kome igrači biraju svoje optimalne strategije naziva se u teoriji igara principom minimaksa.

Primer 1. Naći optimalne strategije za igrača A i B ako je matrična igra tipa 3×3 data matricom:

	B_1	B_2	B_3
A_1	4	6	8
A_2	9	7	8
A_3	8	5	6

U ovom primeru $\alpha = \beta = 7$. Matrične igre kod kojih je donja cena igre jednaka gornjoj ceni igre nazivaju se *igre sa sedlastom tačkom.*

Zajednička vrednost donje i gornje cene igre

$$\alpha = \beta = \nu$$

naziva se čista cena igre. Sedlastoj tački odgovara par minimaksnih strategija koje čine optimalno rešenje igre.

Primer 2. Igra skrivanja. Igrač A se skriva na jednom od dva skrivališta. Ako igrač B nađe igrača na skrivalištu gde se ovaj sakrio, onda igrač A plati igraču B jedan dinar, a ako igrač B potraži igrača A tamo gde se ovaj nije sakrio, onda on plaća igraču A jedan dinar.

3.2 Rešenje igre sa mešovitom strategijama

Pri korišćenju mešovitih strategija pre svakog ponavljanja igre najpre se izvrši slučajan izbor strategije čime se obezbeđuje pojava svake strategije sa nekom verovatnoćom i onda se koristi ona strategija na koju je pao slučajan izbor.

Ako igrač A ima na raspolaganju strategije $A_1, A_2, \ldots, A_m$ a igrač B: $B_1, B_2, \ldots, B_n$ i ako sa $p_1, p_2, \ldots, p_m$, $(p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1)$ označimo verovatnoće sa kojima igrač A bira svoje strategije, a sa $q_1, q_2, \ldots, q_n (q_1 + q_2 + \ldots + q_n = 1)$ - verovatnoće sa kojima igrač B bira svoje strategije, onda možemo reći da vektori

$$P = (p_1, p_2, \ldots, p_m) \quad \text{i} \quad Q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$$

određuju mešovite strategije igrača A i B. Ti vektori su zapravo, strategije igrača A i B.

Verovatnoća događaja da dobitak igrača A iznosi a_{ij} iznosi $p_i q_j$ jer su događaji da igrač A izabere strategiju A_i i da igrač B izabere strategiju B_j nezavisni. Na taj način, srednji dobitak igrača A kada on koristi strategiju P, a igrač B strategiju Q jednaka je

$$E(P, Q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j$$

Rešenje igre je par optimalnih strategija P^* i Q^* koje poseduju sledeću osobinu: ako se jedan od igrača pridržava svoje optimalne strategije, tada drugom igraču nije pogodno da odstupi od svoje optimalne strategije.

Ako je ν cena igre, P i Q proizvoljne strategije igrača A i B, a P^* i Q^* njihove optimalne strategije, onda je ispunjeno

$$E(P, Q^*) \leq \nu \leq E(P^*, Q) \tag{3.1}$$

Leva nejednačina u (3.1) označava da ako drugi igrač primenjuje optimalnu strategiju Q^*, to bilo koju strategiju da izabere igrač A, njegov srednji dobitak ne može da premaši ν. Desna nejednačina (3.1) označava da ako se prvi igrač pridržava svoje optimalne strategije, njegov očekivani dobitak ne može biti manji od ν.

3.2.1 Matrična igra tipa 2×2

3.2.2 Grafičko rešenje matričnih igara tipa $2 \times n$ i $m \times 2$

3.2.3 Matrična igra kao dualni nekanonični zadatak LP

3.3 Razni zadaci

1. Matrična igra je data matricom cene igre:

	B_1	B_2
A_1	0,4	0,2
A_2	0,2	0,6

   a) Naći gornju i donju vrednost matrične igre.

   b) Odrediti optimalne strategije i vrednost igre.

2. Rešiti matričnu igru grafički:

	B_1	B_2
A_1	0	5
A_2	1	8

3. Rešiti matričnu igru grafički:

	B_1	B_2
A_1	2	3
A_2	7	1

4. Rešiti matričnu igru grafički:

	B_1	B_2
A_1	4	2
A_2	1	3

5. Rešiti matričnu igru:

	B_1	B_2
A_1	10	-4
A_2	5	7
A_3	-5	13

6. Rešiti matričnu igru:

	B_1	B_2
A_1	3	0
A_2	2	3
A_3	0	4
A_4	4	-1

7. Odrediti cenu matrične igre, kao i optimalne strategije za igrača A i B ako je matrična igra data sledećom matricom:

	B_1	B_2	B_3
A_1	3	1	2
A_2	2	5	4
A_3	5	8	1

8. Naći vrednost igre i optimalne strategije igrača A i B u sledećoj igri: Svaki od igrača A i B ima po dva novčića: jedan od jednog dinara i drugi od pet dinara. Svaki od njih bira jedan novčić i obojica ih pokazuju istovremeno. Ako su novčići isti, igrač A dobija toliko od igrača B koliko iznosi zbir ta dva novčića, a ako su novčići različiti igrač B dobija od igrača A pet dinara.

9. Odrediti cenu matrične igre, kao i optimalne strategije za igrača A i B, primenom linearnog programiranja, ako je matrična igra data sledećom matricom:

	B_1	B_2	B_3
A_1	7	2	9
A_2	2	9	0
A_3	9	0	11

10. Odrediti cenu matrične igre, kao i optimalne strategije za igrača A i B, primenom linearnog programiranja, ako je matrična igra data sledećom matricom:

	B_1	B_2	B_3
A_1	1	3	0
A_2	5	-3	1
A_3	3	-1	2